dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
Kraków, Łojasiewicza 6

Katowice, 17 września 2023

# Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Bartłomieja Zawalskiego pt. *Application of algebraic methods in geometric tomography*

Rozprawa Pana mgr. Bartłomieja Zawalskiego umocowana jest w teorii rekonstrukcji własności geometrycznych ciał wypukłych w przestrzeniach euklidesowych z informacji dotyczących własności geometrycznych przekrojów ów ciał z hiperpłaszczyznami (bądź podprzestrzeniami o większym kowymiarze); ten dział analizy wypukłej nazywany jest czasem geometryczną tomografią, stąd tytuł rozprawy.

Rzeczona rozprawa została przedstawiona w Instytucie Matematyki PAN w Warszawie (promotorem jest Pan dr hab. Michał Wojciechowski). Liczy ona 64 stron i składa się ze strony tytułowej, strony z dedykacją, spisu treści, omówienia wyników, 43 stron podzielonych na trzy rozdziały zawierające zasadnicze wyniki oraz pięciu stron dodatku omawiającego zastosowanie technik komputerowych obliczeń symbolicznych. Rozdział pierwszy bazuje na opublikowanej pracy autora:

- B. Zawalski, On star-convex bodies with rotationally invariant sections, praca opublikowana elektronicznie w *Beiträge zur Algebra und Geometrie* (2023), 15 ss. `doi.org/10.1007/s13366-023-00702-1`

Rozdział drugi wykorzystuje wyniki zawarte w przeddruku

- B. Zawalski, A concise formula for the Hessian determinant of a function parameterising a quadratic hypersurface, (2022), 6 ss. `arxiv.org/abs/2203.04082`,

jednak sam w sobie jest dużo bardziej obszerny. Wyniki z tego rozdziału zostały zawarte w (niecytowanym w rozprawie) przeddruku

- B. Zawalski, Differential characterization of quadratic surfaces, (2023), 14 ss. `arxiv.org/abs/2304.08073`,

natomiast rozdział trzeci, wedle autora, zawiera wyniki otrzymane wspólnie z Władysławem Jaskinem, jednak żadne oświadczenia o współautorstwie nie zostały dołączone. Przedruk ów, niewspomniany w bibliografii, znajduje się jednak w publicznie dostępnym repozytorium `arXiv.org`:

- V. Yaskin, B. Zawalski, On separably integrable symmetric convex bodies, (2023), 15 ss. `arxiv.org/abs/2306.17127`, Mimo tego, z uwagi na dwie prace monoautorskie i brak podstaw zakładania złej woli, uznaję wkład doktoranta w powstanie rzeczonych artykułów za istotny i wystarczający. Co nietypowe dla rozprawy doktorskiej, każdy z rozdziałów ma własną bibliografię.

Geometryczna tomografia oraz przedstawione idee geometryzacyjne są istotnie wspólnym mianownikiem trzech zasadniczych rozdziałów rozprawy, które jednak są od siebie niezależne i bazują na różnych technikach (od geometrii różniczkowej po algebrę przemienną).

Praca napisana jest w języku angielskim, co do którego nie mam większych zastrzeżeń. Występują jedynie drobne polonizmy np. użycie słowa *sum* zamiast *union* na określenie sumy zbiorów. Rozprawa nie zawiera jednego rozdziału czy sekcji z pojęciami wstępnymi, co nie ułatwia nawigowania. Na przykład dość zaskakująco, definicja ciała wypukłego pojawia się dopiero na stronie 31 mimo, że z punktu widzenia tematyki jest to pojęcie fundamentalne. Autor definiuje transformatę Fouriera funkcji całkowalnej, w poprzednich rozdziałach przechodząc gładko nad dużo trudniejszymi pojęciami z teorii klas charakterystycznych.

## Opis zawartości rozprawy

### Rozdział I

Hipoteza izometryczna Banacha zakłada, że każda $d$-wymiarowa przestrzeń Banacha, której wszystkie $n$-wymiarowe podprzestrzenie przy ustalonym $n \in \{2, \ldots, d-1\}$ są wzajemnie izometryczne musi być przestrzenią Hilberta. Gromow udowodnił tę hipotezę w przypadku parzystych $n$; niedawna praca Bora *et al.* z 2020 ustanawia twierdzącą odpowiedź dla $n$ postaci $n = 4k+1$ za wyjątkiem możliwie $n = 133$. Autorzy jako krok dowodowy ustanawiają nową charakteryzację elipsoid $n$-wymiarowych ($n = 4k+1 \geqslant 5$, $n \neq 133$[1]) jako jedynych symetrycznych ciał wypukłych, których przekroje z hiperpłaszczyznami przechodzącymi przez środek układu współrzędnych są liniowo równoważne ciałom obrotowym. Pozytywna odpowiedź na to pytanie dla pozostałych $n$ pozwoliłaby na dowód hipotezy geometrycznej Banacha.

Główny wynik rozdziału I jest związany z powyższym twierdzeniem/hipotezą: w wymiarze $n \geqslant 4$, symetryczne względem zera ciało gwiaździście wypukłe[2] o brzegu będącym rozmaitością klasy $C^3$ jest ciałem obrotowym (w sensie afinicznym) o ile tylko każde przecięcie z hiperpłaszczyzną przechodzącą przez 0 samo w sobie jest ciałem obrotowym w tym sensie.

Idea dowodu jest niezmiernie interesująca. Autor rozpoczyna od obrania punktu $p$ na brzegu $K$ o dodatnie określonej formie podstawowej i bez straty ogólności przyjęcia, że to właśnie zero jest tym punkte. Z uwagi na założenie $C^3$, można myśleć o pewnym otoczeniu punktu jako o wykresie funkcji $f$ na przestrzeni stycznej do brzegu w tym punkcie, która spełnia warunek $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle + O(\|x\|)^3$ (autor nazywa $f$ kanoniczną parametryzacją brzegu $K$ w punkcie $p$; kanoniczność odnosi się tu wprost do jedyności modulo zmiana bazy ortogonalnej). Następnie zasadniczą część argumentu staje się sprowadzenie sytuacji

[1]To nieoczekiwane obostrzenie związane jest z wyjątkową grupą Liego $E_7$, która ma rząd 133.

[2]Zbiór zwarty jest *gwieździście wypukły* (względem zera) o ile tylko odcinek łączący zero z każdym punktem tegoż zawiera się weń.

do przypadku w którym część jednorodna $f$ rzędu 3, $c_f$, zeruje się na pewnej hiperpłaszczyźnie przestrzeni stycznej (tj. $c_f$ nie jest nieprzywiedlna). W przypadku $n \geqslant 5$ wynika to zasadniczo z twierdzenia Bertiniego, jednak przypadek $n = 4$, jest w mojej ocenie dużo ciekawszy i wymaga odpowiedniej sprawności w geometrii różniczkowej (znajomości klas charakterystycznych nad $\mathbb{Z}_2$, *etc.*).

Narracja rozdziału jest bardzo podobna do tej zawartej w publikacji z której ten pochodzi. Użyty sposób parcia ku dowodowi, o ile właściwy w artykule przeznaczonym dla ekspertów (wprowadzanie formalnie definicji w ciągu dowodowym, formułowania i dowodzenie lematów) utrudnia nawigowanie przez dużo większy dokument jakim jest rozprawa.

## Rozdział II

Drugi rozdział poświęcony jest różniczkowej charakteryzacji powierzchni drugiego stopnia. Doktorant rozważa funkcję $f$ będącą lokalnie klasy $W^{3,1}$ na pewnym obszarze $\Omega$ w $\mathbb{R}^n$ wykazując, że jej wykres jest zawarty w powierzchni drugiego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest słabym rozwiązaniem układu równań różniczkowych cząstkowych stopnia 3:

$$\begin{aligned} f^{(3,0)}{f^{(0,2)}}^2 - 3f^{(1,2)}f^{(2,0)}f^{(0,2)} + 2f^{(0,3)}f^{(1,1)}f^{(2,0)} = 0, \\ f^{(0,3)}{f^{(2,0)}}^2 - 3f^{(2,1)}f^{(0,2)}f^{(2,0)} + 2f^{(3,0)}f^{(1,1)}f^{(0,2)} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

o ile tylko hesjan $f$ nie jest nieujemny na całym obszarze $\Omega$. Wyniki tego rodzaju związane są z charakteryzacją Blaschkego krzywych stożkowych jako krzywych na płaszczyźnie mających krzywiznę (Blaschke rozważał pojedyncze równanie czątkowe ale w klasie regularności $C^5$).

Metody dowodowe zawierają użycie uogólnionych Wrońskianów oraz dość zawiłych obliczeń symbolicznych w pierścieniu wielomianów dwóch zmiennych z różniczkowaniami cząstkowymi. Z racji tego część obliczeń została (słusznie) wyekspediowana do programu Mathematica. Autor dołączył stosowne *notebooki*, których można użyć do replikowania obliczeń.

Na stronie 24 autor czyni uwagę, że dowodzone twierdzenia mają naturę algebraiczną i z racji tego zachodzą *mutatis mutandis* w przypadku zespolonym dla funkcji holomorficznych i że podobne uogólnienia zachodzą w stosunku do wyników innych autorów. O ile w pracach publikowanych takie uwagi są oczywiście dopuszczalne, rozprawa doktorska jest miejscem, w którym można (a nawet należy) zawrzeć dowody tego rodzaju rozważań.

## Rozdział III

Ostatni rozdział rozprawy zawiera, w mojej ocenie, najbardziej interesujące wyniki. Doktorant dokonuje charakteryzacji wielowymiarowych elipsoid (czy nawet kul euklidesowych) w klasie ciał wypukłych o (nieskończenie) gładkim brzegu w kontekście $k$-rozdzielnej całkowalności, która to zdefiniowana jest poprzez możliwość zapisania funkcji $k$-wymiarowej objętości izotropowej jako sumy iloczynów funkcji, gdy jeden czynnik w składniku zależy tylko od podprzestrzeni $k$-wymiarowych, ale nie od parametru $t$ a drugi *vice versa*.

Dowód zasadniczego twierdzenia podzielony jest na trzy części. W pierwszej części następuje algebraizacja problemu w języku równań wielomianowych by zinterpretować je jako elementy pewnej algebry z gradacją zadaną przez pewną skończoną grupę cykliczną parzystego rzędu. Następnie, rozwiązawszy znalezione równania, używając teorii waluacji, autor odfiltrowuje te, które nie niosą istotnych informacji o problemie.

## Ocena merytoryczna rozprawy

W mojej ocenie rozprawa doktorska mgr. Zawalskiego jest oryginalna (bynajmniej nie tylko ze względu swą lekką tematyczną eklektyczność) z uwagi na szerokie spektrum zastosowanych technik dowodowych. Rozprawa wnosi istotny wkład w teorię ciał wypukłych, ze szczególnym uwzględnieniem tomografii geometrycznej. Tematyka rozprawy jest dobrze osadzona w badaniach prowadzonych w kraju i za granicą, a zasadnicze wyniki zostały bardzo dobrze naświetlone, co sprawia, że motywacje rozważania często dość technicznych w wypowiedzi twierdzeń są wystarczająco czytelne. Pragnę przy tym nadmienić, że zastosowane techniki dowodowe wymagały istotnych trudności natury technicznej i wymagały nabycia biegłości w metodach teorii waluacji czy zaawansowanej geometrii różniczkowej, które nie należą do wspólnego warsztatu matematyków.

Sporadyczne uwagi krytyczne zaprezentowane w niniejszej recenzji w żaden sposób nie umniejszają wysokiej oceny merytorycznej zawartości rozprawy. Pan mgr Zawalski wykazał się dojrzałością w operowaniu zaawansowanym aparatem matematycznym (z geometrii różniczkowej, topologii algebraicznej, algebry przemiennej) i otrzymał wartościowe rezultaty.

## Konkluzja

Chciałbym stwierdzić jednoznacznie, że rozprawa doktorstka Pana mgr. Zawalskiego spełnia wszelkie wymagania *Ustawy o stopniach i tytule naukowym* z 20 lipca 2018, w związku z czym, wnioskuję o dopuszczenie Pana mgr. Zawalskiego do kolejnych etapów przewodu doktorskiego celem nadania stopnia naukowego doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w zakresie matematyka.

(-) dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ

Tomasz Kania